583. 雑記 I

南雲　道夫（阪大）

§ 反覆近似法

古典的解析特ニ陰函数又微分方程式ノ如キ函数方程式ニ於テ，反覆近似法（逐次近似法）ガ理論上カラモ應用上カラモ重要ナ一方法デアルコトガ知ラレテヰル。次ニ之ニツイテ極ササヤカナ注意ヲ加ヘタイ。

$\boxed{1}$ 問題ガ普通ノ陰函數ニモ亦函數空間ニ於ケル函數方程式ニモ共通ナル点ヲ明ラカニスルタメ，抽象空間中デ最モ具体的ナル<u>線狀距離空間</u>(B)ニ於ケル方程式

$$\mathfrak{x} = F(\mathfrak{x})$$

ヲ考ヘヨウ。

線狀距離空間(B)トハ線狀（*Vektor* ト同様ニ一次結合ガ成立スル）デ絶對値（*norm*）$|\mathfrak{x}|$ ガ定義サレ $|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|$ ヲ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ノ距離トシテ完全性（*Cauchy* ノ收斂條件成立）ヲ有スル空間デアル。例ヘバ $a \leqq x \leqq b$ ニ於ケル連續函數 $f(x)$ ヲ要素トシ，ソノ全体カラ成ル集合ヲ C トスルトキ

$$|f| = \underset{a \leqq x \leqq b}{Max}\left[\,|f(x)|\,\right]$$

ヲ以テ要素 f ノ絶對値トスレバ，C ハ（B）空間デアル。（詳細ハ *Banach: Theorie des Operations linéaires* 參照）

今 $F(\mathfrak{x})$ ガ *Lipschitz* ノ條件

$$|F(\mathfrak{x}_1) - F(\mathfrak{x}_2)| \leqq k\,|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|\,; \quad \underline{k<1}$$

ヲ滿足シテヰルトスル。シカラバ

$$\mathfrak{x}_{n+1} = F(\mathfrak{x}_n)$$

ニヨツテ $\{\mathfrak{x}_n\}$ ヲ定義スレバ，$F(\mathfrak{x})$ ガ有界閉集合 $\mathfrak{M}$ デ定義サレテヰテ $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ ナラバ $\mathfrak{x}_n$ ハ $\mathfrak{x} = F(\mathfrak{x})$ ノ解ニ收斂スル。

何トナレバ

$$|y_{n+p}-y_n| \leqq k|y_{n+p-1}-y_{n-1}| \leqq \cdots\cdots \leqq k^n|y_p-y_0|$$
$$\leqq k^n \Delta \qquad (\Delta \text{ ハ } \mathfrak{M} \text{ ノ直徑})$$

$\boxed{2}$ 此ノ方法ハ勿論非線状距離空間（但シ完全性ヲ要ス）$\mathfrak{R}$ ニ擴張出來ル。即チ $F(P)$ ハ $P \in \mathfrak{M}$（有界閉集合）$\subset \mathfrak{R}$ デ定義サレソノ値ガ又 $\mathfrak{R}$ ニ屬シ

$$\rho(F(P_1), F(P_2)) \leqq \varphi(\rho(P_1, P_2))$$

$\rho(P_1, P_2)$ ハ P_1, P_2 ノ距離，$\varphi(x)$ ハ $0 \leqq x$ デ單調増加連續函數デ

$$0 \leqq \varphi(x) < x$$

ナル性質ヲ有スル。シカラバ

$$P_{n+1} = F(P_n)$$

ニヨッテ $\{P_n\}$ ヲ定メレバ，$\{P_n\} \subset \mathfrak{M}$ ナラバ之レハ $P = F(P)$ ノ解ニ收斂スル。證明ハ容易デアル（勿論解ハ只一ツ）

$\boxed{3}$ サテ $\boxed{1}$ ヲバ直チニ常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

ニ適用セントスルトキ，一寸差支ヘルノハ Lipschitz 常數 $k < 1$ ナル條件デアル。

次ニ $f(t, y)$ ガ條件

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqq L|y_1 - y_2|$$

ヲ滿足セルトキ（L ハ正常數 1 ヨリ大デヨイ）ニハ

$$\|y(t)\| = \text{上限}\left|y(t)e^{-L'|t-t_0|}\right|, \quad L < L'$$

ニヨッテ要素 $y(t)$ ノ絶對値 $\|y(t)\|$ トスル函數空間ヲ考ヘレバヨイ。何トナレバ

$$F[y(t)]=y_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,\ y(\tau))\,d\tau$$

トスレバ

$$\Big|F[y_1(t)]-F[y_2(t)]\Big|\leqq L\left|\int_{t_0}^{t}\Big|y_1(t)-y_2(t)\Big|\,dt\right|$$

之レカラ容易ニ

$$\Big\|F[y_1]-F[y_2]\Big\|\leqq\frac{L}{L'}\Big\|y_1(t)-y_2(t)\Big\|$$

$\dfrac{L}{L'}<1$ デアルカラ

要スルニ各種ノ問題ニ對シ適當ナル技巧ヲ用フレバ，之ヲ一般的ナ場合ニ統一出來ルコトヲ示シタニスギナイ。抽象的ナモノト具体的ナモノトノ結合点，ソコニ自分ハ興味ヲ感ズル。